

Volumen

In dieser Lerneinheit beschäftigen wir uns mit dem Volumen geometrischer Körper. Dafür nutzen wir auch den Digitalen Baukasten. Du erfährst, wie dir die Berechnung des Volumens im Alltag helfen kann und führst dazu interessante Textaufgaben durch.

Volumen - Wofür braucht man das?

- 1 Lies dir zuerst die Infobox gründlich durch.

Volumen

Bei jedem geometrischen Körper kann man das Volumen (V) berechnen. Es gibt an, wie viel Platz ein Körper einnimmt.

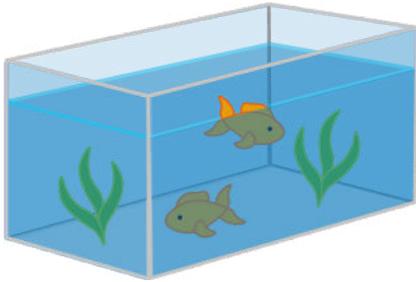
Beispiel: Stell dir vor, du hast einen hohlen Körper (z.B. einen Koffer, einen Eimer), den du befüllst. Das, was der Körper aufnehmen kann, ist das Volumen.

- 2 **Wozu brauchen wir das?**

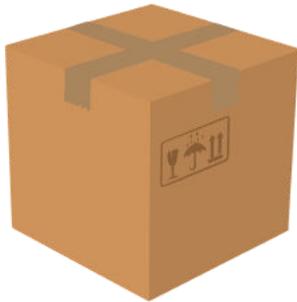
Schau dir die Bilder an und überlege dabei, wozu es sinnvoll ist, das Volumen zu berechnen.

Beispiel: Wie viel Wasser passt in das Fass?





Beispiel: Wie viel Wasser wird benötigt, um das Aquarium zu füllen?



Beispiel: Wie viele Liter Füllmaterial (z.B. Styropor-Flocken) werden benötigt?

3 Volumen im Alltag

Überlege dir weitere Situationen im Alltag, bei denen das Berechnen des Volumens wichtig sein kann.

Stellt euch eure Ideen gegenseitig vor.



Keine Idee?

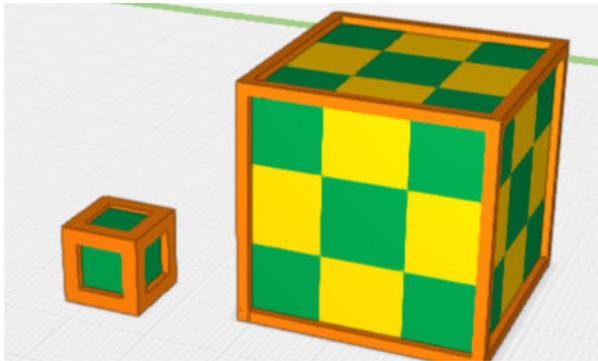
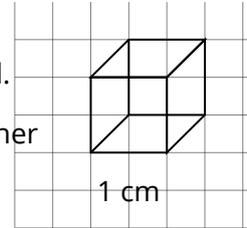
Stell dir vor, du willst Marmelade kochen und hast 10 Gläser mit einer bestimmten Füllmenge.

Beispiel: Wie viel Marmelade muss insgesamt gekocht werden?

Volumen verstehen

Um zu erklären, was es mit dem Volumen auf sich hat, stellen wir uns vor, dass ein geometrischer Körper vollständig mit kleinen Würfeln befüllt wird.

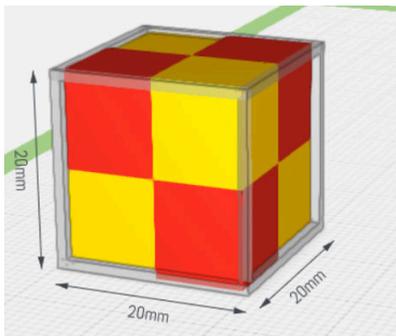
Dafür nutzen wir sogenannte Einheitswürfel. Ein Einheitswürfel ist ein kleiner Würfel mit einer Kantenlänge von 1 cm.



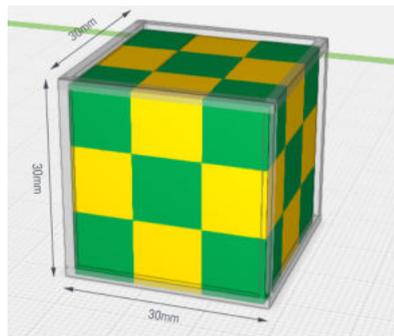
Um einen kleinen Körper zu füllen, benötigt man nur wenige Einheitswürfel. Er hat ein geringes Volumen.

Um einen sehr großen Körper zu füllen, benötigt man viel mehr Einheitswürfel. Er hat ein größeres Volumen.

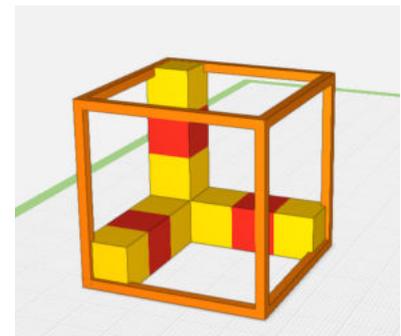
4 Sieh dir die Bilder an und fülle die Tabelle aus.



Würfel 1



Würfel 2



Würfel 3 (Zusatz)

	Würfel 1	Würfel 2	Würfel 3 (Zusatz)
Kantenlänge	2 cm	3 cm	4 cm
Anzahl der Einheitswürfel	8	27	64

Welcher der Würfel hat das größte und welcher das kleinste Volumen?

Kleinstes Volumen: Würfel 1 **Größtes Volumen:** Würfel 3

5 Bevor wir uns weiter damit beschäftigen, wie das Volumen berechnet wird, solltest du dich mit den Volumeneinheiten vertraut machen oder dein Wissen wiederholen. Eine Wiederholung findest du auf der nächsten Seite.

Wiederholung: Volumeneinheiten

Bevor wir uns damit beschäftigen, wie man das Volumen eines Körpers berechnen kann, solltest du dein Wissen zu Volumeneinheiten auffrischen. Bearbeite dazu die folgenden Aufgaben.

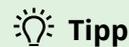
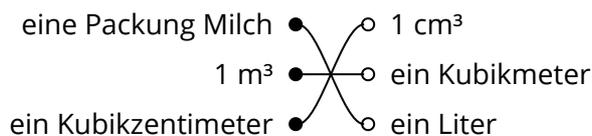
- 1 Vervollständige den Lückentext. Wähle aus den folgenden Begriffen: *Rechner, drei, vier, Volumen, Gewicht, Volumen, Maßeinheiten, Kantenlänge, Platz, Quadratzentimeter, Kubikmeter, Kubikzentimeter, Dezimeter.*

Die Volumeneinheiten

Das **Volumen** ist ein Maß dafür, wie viel **Platz** ein geometrischer Körper einnimmt. Kubikmeter (m^3) und Kubikzentimeter (cm^3) sind **Maßeinheiten**, mit denen das **Volumen** von Körpern angegeben wird. Wenn ihr das Wort Kubik oder 3 seht, geht es um **drei** Dimensionen: Länge, Breite und Höhe.

Ein kleiner Würfel mit einer **Kantenlänge** von einem Zentimeter hat ein Volumen von einem **Kubikzentimeter**. Ein Karton, der einen Meter lang, einen Meter breit und einen Meter hoch ist, hat ein Volumen von einem **Kubikmeter**.

- 2 Ordne zu.



Tipp

$$1\text{ l} \triangleq 1\text{ dm}^3 \triangleq 1.000\text{ cm}^3$$

- 3 Nummeriere die Angaben der Größe nach. Beginne mit der kleinsten Angabe. (1-6)

3 ein Liter

1 1 cm^3

6 2 m^3

4 fünf Kubikdezimeter

2 drei Kubikzentimeter

5 $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ m}$

- 4 Wie viele Kubikzentimeter hat ein Kubikmeter?

- $1\text{ m}^3 \triangleq 1.000\text{ cm}^3$
 $1\text{ m}^3 \triangleq 1.000.000\text{ cm}^3$
 $1\text{ m}^3 \triangleq 0,0001\text{ cm}^3$
 $1\text{ m}^3 \triangleq 100\text{ cm}^3$

- 5 Welche dieser Einheiten ist keine Maßeinheit für das Volumen?

- Milliliter
 mm^3
 Hektar
 Kubikkilometer

Volumen berechnen

Du hast vorhin schon gelesen, dass man das Volumen durch die Füllung mit Einheitswürfeln veranschaulichen kann. Ein Einheitswürfel mit einer Kantenlänge von 1 cm hat ein Volumen von 1 cm³. Passen 27 Einheitswürfel in einem geometrischen Körper, dann hat also er ein Volumen von 27 cm³.

Damit man das Volumen von geometrischen Körpern bestimmen kann, ohne Einheitswürfel zu zählen, gibt es eine Formel zur Berechnung des Volumens.



Volumenberechnung bei Quader und Würfel

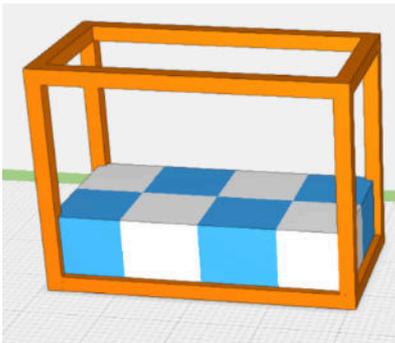
Quader: $V = a \cdot b \cdot c$

Würfel: $V = a^3$



Woher kommt diese Formel?

Damit du besser verstehst, woher diese Formel kommt, leiten wir sie nun gemeinsam her. Dafür nutzen wir als Beispiel einen Quader mit den Maßen: $a = 4 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$, $c = 3 \text{ cm}$. In den Abbildungen wird der Quader als Kantenmodell dargestellt.



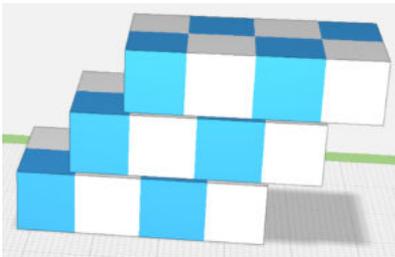
Nun berechnen wir zuerst, wie viele Einheitswürfel auf die Grundfläche des Quaders passen. Dafür nutzen wir die Formel für den Flächeninhalt:

$$A = a \cdot b$$

$$A = 4 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm}$$

$$\underline{A = 8 \text{ cm}^2}$$

Wir benötigen also 8 Einheitswürfel, um die Grundfläche des Quaders zu bedecken.



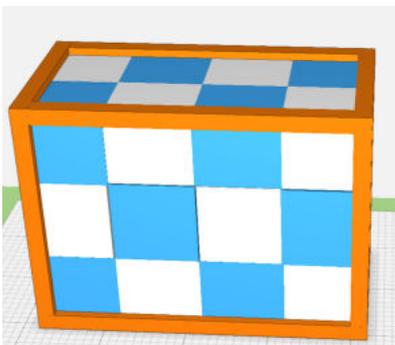
Um den großen Quader vollständig zu füllen, müssen wir mehrere Schichten mit jeweils 8 Einheitswürfeln übereinander stapeln. Da der Quader 3 cm hoch ist, benötigen wir 3 Schichten.

$$V = A \cdot c$$

$$V = 8 \text{ cm}^2 \cdot 3 \text{ cm}$$

$$\underline{V = 24 \text{ cm}^3}$$

Wir benötigen 24 Einheitswürfel, um den Quader vollständig zu füllen. Er hat also ein Volumen von 24 cm³.



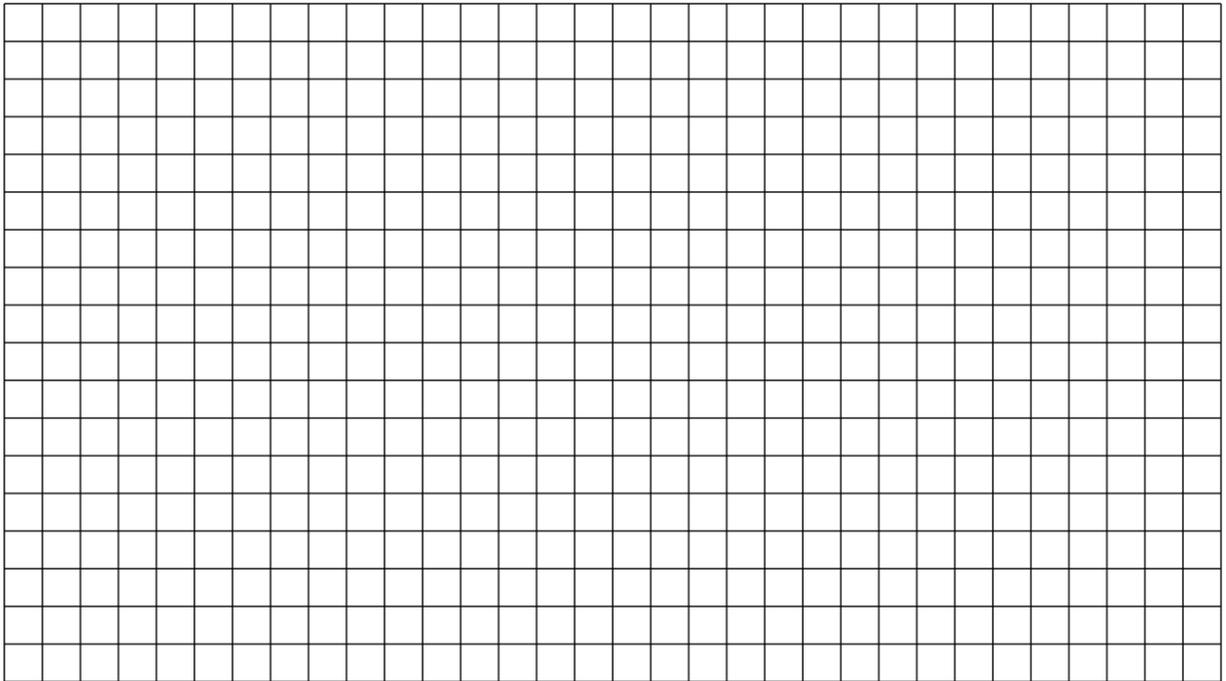
Aus den beiden Formeln, die wir verwendet haben:

$$A = a \cdot b \quad \text{und} \quad V = A \cdot c$$

ergibt sich also für die Berechnung des Volumens von Quadern folgende Formel:

$$\underline{V = a \cdot b \cdot c}$$

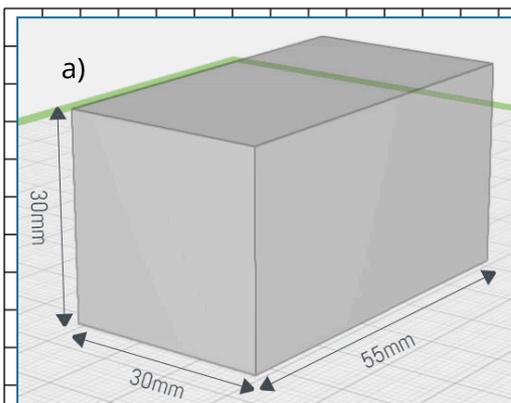
- 7 Ein Würfel mit einer Kantenlänge von 0,8 dm soll verglichen werden mit einem Quader mit den Maßen 5 cm x 10 cm x 11 cm.
Welcher der beiden Körper hat das größere Volumen? Notiere deinen Rechenweg.



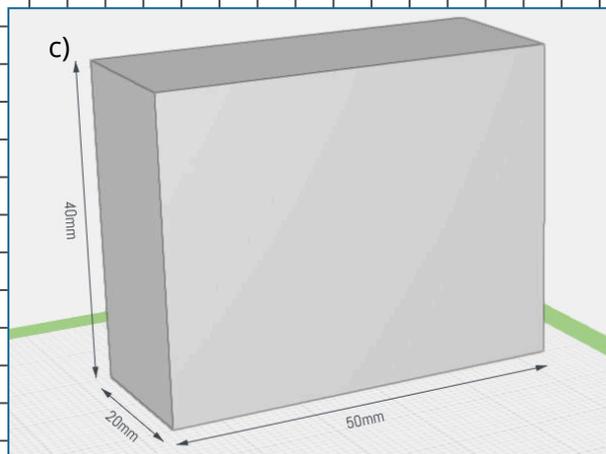
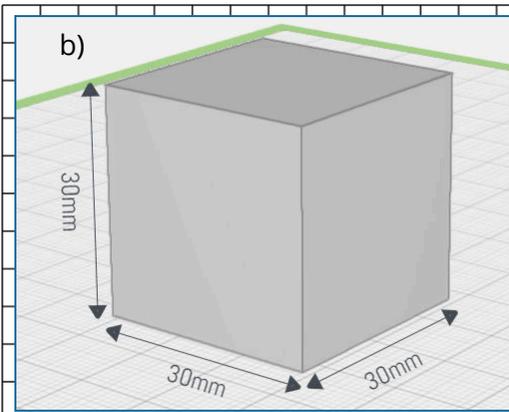
Lösung: Der Quader hat das größere Volumen: $V_w = 512\text{cm}^3$, $V_Q = 550\text{cm}^3$
Die ausführlichen Lösungswege findest du am Ende dieser Lerneinheit.

8 Volumenberechnung

Berechne das Volumen dieser Würfel und Quader. Notiere Rechenwege und Lösungen.



a)



Lösung:

a) $V = 49.5000 \text{ mm}^3 \hat{=} 49,5 \text{ cm}^3 \hat{=} 0,0495 \text{ l}$

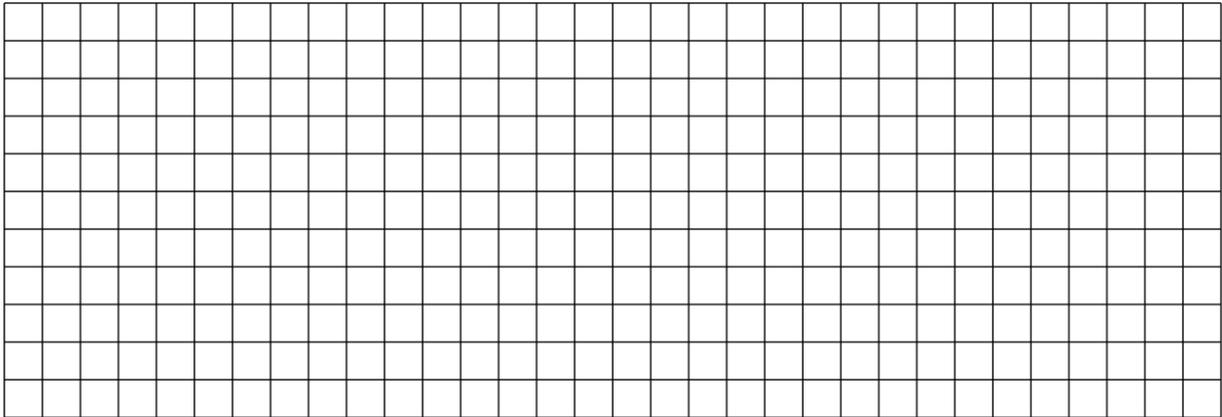
b) $V = 27.000 \text{ mm}^3 \hat{=} 27 \text{ cm}^3 \hat{=} 0,027 \text{ l}$

c) $V = 40.000 \text{ mm}^3 \hat{=} 40 \text{ cm}^3 \hat{=} 0,04 \text{ l}$

Die ausführlichen Lösungswege findest du am Ende dieser Lerneinheit.

Übungen mit dem Digitalen Baukasten

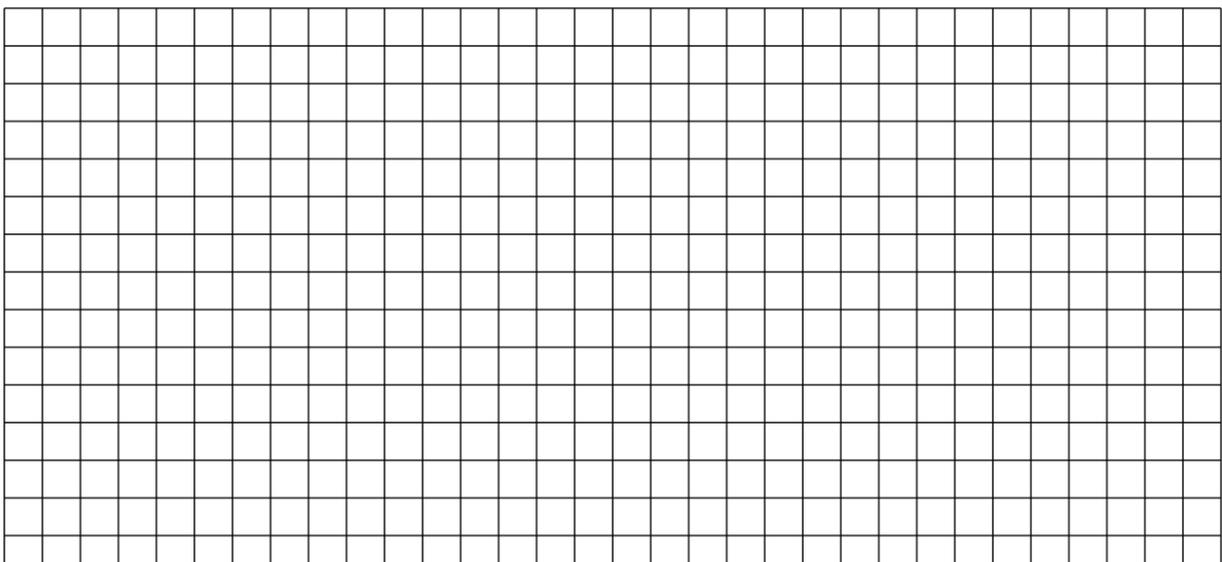
- 9 Wende dein Wissen zur Volumenberechnung an und bearbeite die folgenden Arbeitsschritte.
- Berechne das Volumen eines Würfels mit einer Kantenlänge von 2 cm.
 - Überprüfe dein Ergebnis nun im Digitalen Baukasten. Baue dafür das Kantenmodell eines Würfels mit einer Kantenlänge von 2 cm und fülle ihn mit Einheitswürfeln (Kantenlänge 1 cm). Wie viele Würfel benötigst du?



Lösung: a) $V = 8 \text{ cm}^3$ b) 8 Einheitswürfel

Die ausführlichen Lösungswege findest du am Ende dieser Lerneinheit.

- 10 Bearbeite die folgenden Teilaufgaben im Digitalen Baukasten. Nutze ausschließlich ganzzahlige Maße und notiere deinen Lösungsweg. Kontrolliere deine Lösungen selbstständig, indem du das Volumen berechnest.
- Konstruiere einen Würfel mit einem Volumen von 125 cm^3 .
 - Konstruiere mindestens zwei verschiedene Quader mit einem Volumen von 24 cm^3 .
 - Konstruiere einen Quader mit einer Grundfläche von 12 cm^2 . Wie hoch muss der Quader sein, damit sich ein Volumen von 36 cm^3 ergibt?



Lösung: a) $a = 5 \text{ cm}$ b) $c = 3 \text{ cm}$ c) Beispiele: $1 \times 1 \times 24 \text{ cm}$, $2 \times 3 \times 4 \text{ cm}$, usw.

Die ausführlichen Lösungswege findest du am Ende dieser Lerneinheit.

Zusatz: Volumen bei Kugeln

Für die Berechnung des Volumens einer Kugel wird folgende Formel genutzt:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

- 14** Sieh dir die Formel zur Berechnung des Volumens einer Kugel an. Warum kann man hier nicht den Flächeninhalt der Grundfläche mit der Höhe multiplizieren wie bei Quader und Zylinder?

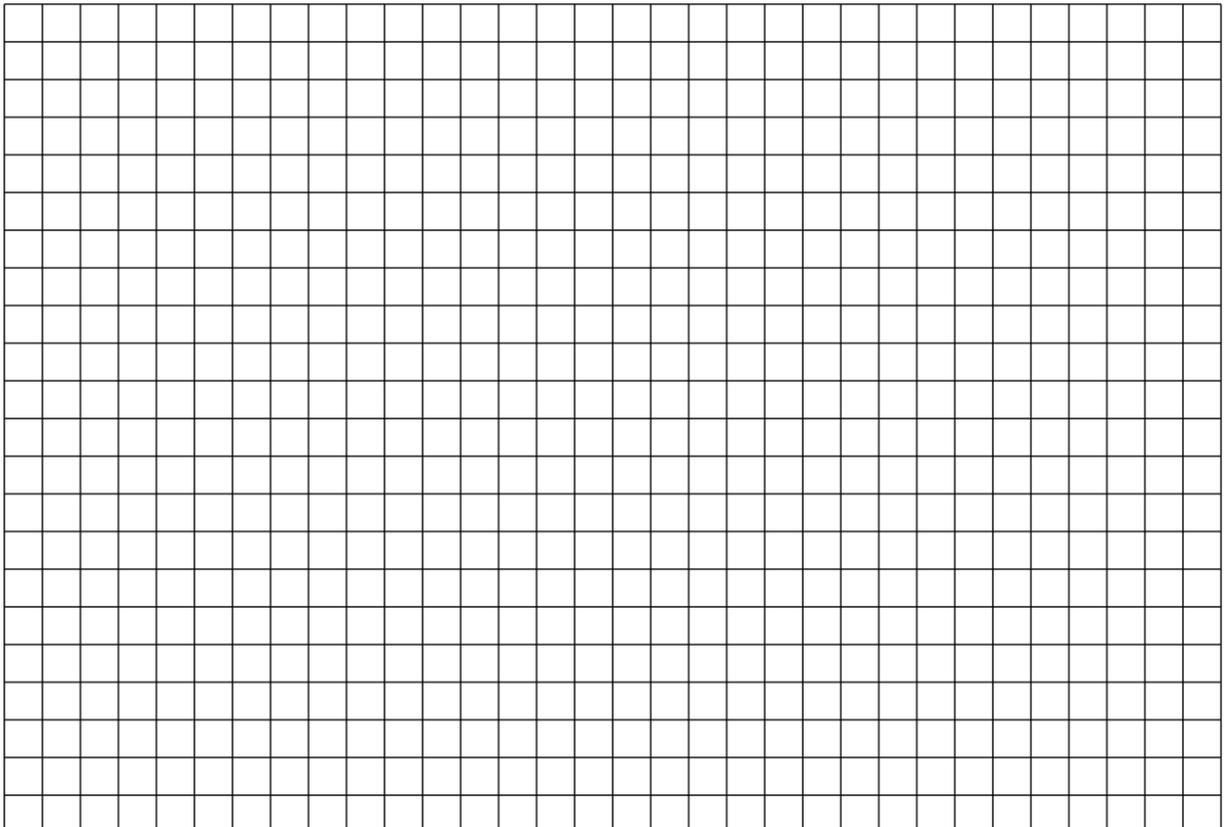


Tipp

Lies dir noch einmal den Text auf Seite 5 durch und überlege, was die Kugel von Würfel und Quader unterscheidet.

- 15** Löse die folgenden Teilaufgaben:

- a) Berechne das Volumen einer Kugel mit einem Radius von 5 cm.
- b) Welches Volumen hat eine Kugel mit einem Umfang von 10 cm?
- c) Konstruiere eine Kugel im Digitalen Baukasten und berechne ihr Volumen.



Lösung: a) $V = 523,6 \text{ cm}^3$ b) $V = 16,9 \text{ m}^3$

Lösungen und Lösungswege

- 7 Ein Würfel mit einer Kantenlänge von 0,8 dm soll verglichen werden mit einem Quader mit den Maßen 5 cm x 10 cm x 11 cm.
Welcher der beiden Körper hat das größere Volumen? Notiere deinen Rechenweg.

geg.: Würfel mit $a = 0,8 \text{ dm}$,
Quader mit $a = 5 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$, $c = 11 \text{ cm}$ ges.: V

$$V_W = a^3$$

$$V_W = (0,8 \text{ dm})^3$$

$$\underline{V_W = 0,512 \text{ dm}^3 = 512 \text{ cm}^3}$$

$$V_Q = a \cdot b \cdot c$$

$$V_Q = 5 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 11 \text{ cm}$$

$$\underline{V_Q = 550 \text{ cm}^3}$$

Der Quader hat mit 550 cm^3 das größere Volumen.

8 Volumenberechnung

Berechne das Volumen dieser Würfel und Quader. Notiere Rechenwege und Lösungen.

a) geg.: $a = 30 \text{ mm}$, $b = 55 \text{ mm}$, $c = 30 \text{ mm}$ ges.: V

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 30 \text{ mm} \cdot 55 \text{ mm} \cdot 30 \text{ mm}$$

$$\underline{V = 49.500 \text{ mm}^3 = 49,5 \text{ cm}^3 = 0,0495 \text{ dm}^3 = 0,0495 \text{ l}}$$

b) geg.: $a = 30 \text{ mm}$, ges.: V

$$V = a^3$$

$$V = (30 \text{ mm})^3$$

$$\underline{V = 27.000 \text{ mm}^3 = 27 \text{ cm}^3 = 0,027 \text{ dm}^3 = 0,027 \text{ l}}$$

c) geg.: $a = 20 \text{ mm}$, $b = 50 \text{ mm}$, $c = 40 \text{ mm}$ ges.: V

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 20 \text{ mm} \cdot 50 \text{ mm} \cdot 40 \text{ mm}$$

$$\underline{V = 40.000 \text{ mm}^3 = 40 \text{ cm}^3 = 0,04 \text{ dm}^3 = 0,04 \text{ l}}$$

9 Wende dein Wissen zur Volumenberechnung an und bearbeite die folgenden Arbeitsschritte.

- Berechne das Volumen eines Würfels mit einer Kantenlänge von 2 cm.
- Überprüfe dein Ergebnis nun im Digitalen Baukasten. Baue dafür das Kantenmodell eines Würfels mit einer Kantenlänge von 2 cm und fülle ihn mit Einheitswürfeln (Kantenlänge 1 cm). Wie viele Würfel benötigst du?

a) geg.: $a = 2 \text{ cm}$ ges.: V

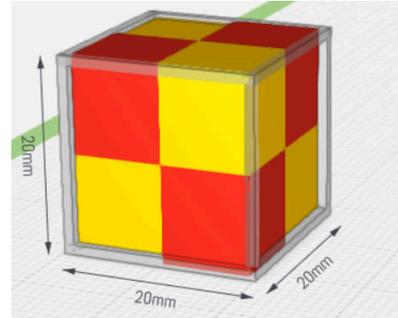
$$V = a^3$$

$$V = (2 \text{ cm})^3$$

$$\underline{V = 8 \text{ cm}^3}$$

Das Volumen des Würfels beträgt 8 cm^3 .

b) Es werden 8 Einheitswürfel benötigt, um den Würfel zu füllen.



10 Bearbeite die folgenden Teilaufgaben im Digitalen Baukasten.

Nutze ausschließlich ganzzahlige Maße und notiere deinen Lösungsweg. Kontrolliere deine Lösungen selbstständig, indem du das Volumen berechnest.

- Konstruiere einen Würfel mit einem Volumen von 125 cm^3 .
- Konstruiere einen Quader mit einer Grundfläche von 12 cm^2 . Wie hoch muss der Quader sein, damit sich ein Volumen von 36 cm^3 ergibt?
- Konstruiere mindestens zwei verschiedene Quader mit einem Volumen von 24 cm^3 .

a) geg.: Würfel mit $V = 125 \text{ cm}^3$ ges.: a

Du kannst die Aufgabe durch Probieren lösen, indem du verschiedene Werte in die Formel zur Berechnung des Volumens einsetzt: $V = a^3 = a \cdot a \cdot a$

$$\text{mit } a = 4 \text{ cm} \rightarrow V = (4 \text{ cm})^3 = 64 \text{ cm}^3 \neq 125 \text{ cm}^3$$

$$\text{mit } a = 5 \text{ cm} \rightarrow \underline{V = (5 \text{ cm})^3 = 125 \text{ cm}^3}$$

Der Würfel muss eine Kantenlänge von 5 cm haben.

b) geg.: Quader mit $V = 36 \text{ cm}^3$, $a \cdot b = 12 \text{ cm}^2$ ges.: c

$$V = a \cdot b \cdot c \quad \rightarrow \quad 36 \text{ cm}^3 = 12 \text{ cm}^2 \cdot c$$

Du kannst diese Aufgabe lösen, indem du die Formel umstellst oder indem du verschiedene Werte einsetzt und ausprobierst, ob das Ergebnis stimmt.

Lösung: $c = 3 \text{ cm}$ Der Quader muss 3 cm hoch sein.

c) geg.: Quader mit $V = 24 \text{ cm}^3$ ges.: a, b, c

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Du kannst diese Aufgabe durch Probieren lösen, indem du verschiedene Werte in die Formel einsetzt. Wähle dafür kleine ganzzahlige Werte und achte darauf, dass das Gesamtergebnis 24 betragen muss.

Beispiele für korrekte Lösungen:

- a = 1 cm, b = 1 cm, c = 24 cm
- a = 1 cm, b = 2 cm, c = 12 cm
- a = 1 cm, b = 3 cm, c = 8 cm
- a = 1 cm, b = 4 cm, c = 6 cm
- a = 2 cm, b = 2 cm, c = 6 cm
- a = 2 cm, b = 3 cm, c = 4 cm
- a = 2 cm, b = 4 cm, c = 3 cm

11 Zusatzaufgabe: Im Digitalen Baukasten wurden zwei Würfel konstruiert. Der größere der beiden Würfel hat eine doppelt so lange Kantenlänge wie der kleine Würfel. Nun wurde mithilfe der Schere der kleinere Würfel vollständig aus dem größeren ausgeschnitten (s. Abbildung).

Wie hat sich das Volumen des großen Würfels dadurch verändert? Begründe deine Antwort!

Du kannst diese Aufgabe auf verschiedene Arten lösen.

Lösungsweg 1: Logik und Konstruktion

Konstruiere die Aufgabe mit beliebigen Maßen im Digitalen Baukasten nach. Dann wirst du sehen, dass 8 der kleinen Würfel in den großen Würfel passen. Wird einer der kleinen Würfel aus dem großen Würfel ausgeschnitten, verkleinert sich das Volumen also um $\frac{1}{8}$.

Lösungsweg 2: Ausprobieren

Wähle verschiedene Maße für die Würfel, setze sie in die Formel ein und berechne das Volumen.

- $a_1 = 4 \text{ cm}, a_2 = 2 \text{ cm} \rightarrow V_1 = 64 \text{ cm}^3, V_2 = 8 \text{ cm}^3, V_{1-2} = 56 \text{ cm}^3$
- $a_1 = 2 \text{ cm}, a_2 = 1 \text{ cm} \rightarrow V_1 = 8 \text{ cm}^3, V_2 = 1 \text{ cm}^3, V_{1-2} = 7 \text{ cm}^3$
- ...

Anhand der Beispiele wirst du sehen, dass das Volumen des größeren Würfels immer achtmal so groß ist, wie das Volumen des kleineren Würfels.

Lösungsweg 3: Einsetzen (hoher Schwierigkeitsgrad)

$$V_{1-2} = V_1 - V_2$$

$$V_1 = a^3$$

$$V_2 = \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{8} \cdot a^3$$

$$\rightarrow V_{1-2} = a^3 - \frac{1}{8} \cdot a^3 \quad \rightarrow V_{1-2} = \frac{7}{8} \cdot a^3 \quad \rightarrow \underline{V_{1-2} = \frac{7}{8} \cdot V_1}$$

13 Löse die folgenden Teilaufgaben:

- Wie groß ist das Volumen eines Zylinders mit $r = 3 \text{ cm}$ und $h = 4 \text{ cm}$?
- Wie groß ist das Volumen eines Zylinders mit einem Durchmesser von 5 m und einer Höhe von 3 m ?
- Ein Zylinder mit einem Radius von $1,5 \text{ cm}$ soll ein Volumen von 20 bis 25 cm^3 haben. Wie hoch muss er dafür mindestens sein? Wie hoch darf er maximal sein?
- Konstruiere im Digitalen Baukasten einen Zylinder und berechne sein Volumen.
- Zusatz:** Gelingt es dir, einen zweiten Zylinder zu konstruieren mit demselben Volumen wie in Teilaufgabe *d*)? Warum ist das so schwierig?

a) geg.: $r = 3 \text{ cm}$, $h = 4 \text{ cm}$
ges.: V

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \pi \cdot (3 \text{ cm})^2 \cdot 4 \text{ cm}$$

$$\underline{V = 113,1 \text{ cm}^3}$$

Das Volumen des Zylindes beträgt $113,1 \text{ cm}^3$.

b) geg.: $d = 5 \text{ m}$, $h = 3 \text{ m}$
ges.: V

$$V = \pi \cdot (0,5 \cdot d)^2 \cdot h$$

$$V = \pi \cdot (0,5 \cdot 5 \text{ m})^2 \cdot 3 \text{ m}$$

$$\underline{V = 58,9 \text{ m}^3}$$

Das Volumen des Zylindes beträgt $58,9 \text{ m}^3$.

c) geg.: $r = 1,5 \text{ cm}$, $V_{min} = 20 \text{ cm}^3$, $V_{max} = 25 \text{ cm}^3$
ges.: h

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad \rightarrow \quad h = \frac{V}{\pi \cdot r^2}$$

Mit $V = 20 \text{ cm}^3$:
$$h = \frac{20 \text{ cm}^3}{\pi \cdot (1,5 \text{ cm})^2} \rightarrow h_{min} = 2,83 \text{ cm}$$

Mit $V = 25 \text{ cm}^3$:
$$h = \frac{25 \text{ cm}^3}{\pi \cdot (1,5 \text{ cm})^2} \rightarrow h_{max} = 3,53 \text{ cm}$$

Achte beim Runden darauf, dass dadurch nicht V_{min} unterschritten und V_{max} überschritten werden darf. Setze deine gerundeten Ergebnisse immer probeweise in die Formel ein und prüfe, ob das richtige Volumen herauskommt.

Die Höhe muss mindestens $2,83 \text{ cm}$ und höchstens $3,53 \text{ cm}$ betragen.

15 Löse die folgenden Teilaufgaben:

- Berechne das Volumen einer Kugel mit einem Radius von 5 cm.
- Welches Volumen hat eine Kugel mit einem Umfang von 10 cm?
- Konstruiere eine Kugel im Digitalen Baukasten und berechne ihr Volumen.

a) geg.: $r = 5 \text{ cm}$ ges.: V

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (5 \text{ cm})^3$$

$$\underline{V = 523,6 \text{ cm}^3}$$

Das Volumen beträgt 523,6 cm³.b) geg.: $U = 10 \text{ cm}$ ges.: V

$$U = 2 \cdot \pi \cdot r \quad \rightarrow \quad r = \frac{U}{2 \cdot \pi}$$

$$r = \frac{10 \text{ cm}}{2 \cdot \pi}$$

$$\underline{r = 1,592 \text{ cm}}$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1,592 \text{ cm})^3$$

$$\underline{V = 16,9 \text{ cm}^3}$$

Das Volumen beträgt 16,9 cm³.